Capacità e gli spazi H^1 e H^1_0

1. Una nuova classe di equivalenza

Sia u un elemento di $H^1(\mathbb{R}^d)$, ovvero una classe di equivalenza rispetto alla seguente relazione di equivalenza per funzioni misurabili:

> **Definizione.** Date due funzioni misurabili
> $$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
> diciamo che
> $$\varphi \sim_{ae} \psi$$
> se esiste un insieme $\mathcal{N}$ di misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^d$ tale che
> $$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}.$$

Sappiamo che possiamo trovare una funzione
$$\varphi_u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$
misurabile e nella classe di equivalenza u, con la seguente proprietà:

$$\textit{Esiste un insieme} \quad \mathcal{N}_\varphi \quad \textit{di capacita nulla in } \mathbb{R}^d \textit{ tale che}$$
$$\varphi_u(x_0) = \lim_{r\to 0} \int_{B_r(x_0)} \varphi_u(x)\,dx = \lim_{r\to 0} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \quad \textit{per ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}_\varphi. \tag{1}$$

Inoltre, se
$$\psi_u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$
è un'altra funzione con la stessa proprietà:

$$\textit{Esiste un insieme} \quad \mathcal{N}_\psi \quad \textit{di capacita nulla in } \mathbb{R}^d \textit{ tale che}$$
$$\psi_u(x_0) = \lim_{r\to 0} \int_{B_r(x_0)} \psi_u(x)\,dx = \lim_{r\to 0} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \quad \textit{per ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}_\psi. \tag{2}$$

allora, le due funzioni φ_u e ψ_u coincidono sull'insieme
$$\mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{N}_\varphi \cup \mathcal{N}_\psi),$$
dove possiamo osservare che anche $\mathcal{N}_\varphi \cup \mathcal{N}_\psi$ ha capacità nulla. Ora, definiamo la seguente classe di equivalenza:

> **Definizione.** Date due funzioni misurabili
> $$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
> diciamo che
> $$\varphi \sim_{qe} \psi$$
> se esiste un insieme $\mathcal{N}$ di capacità nulla in $\mathbb{R}^d$ tale che
> $$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}.$$

È immediato verificare che le funzioni ψ_u con la proprietà (2) sono tutti e soli gli elementi della classe di equivalenza di φ_u secondo la relazione $\sim_{qe}$. Quindi, possiamo identificare le classi di equivalenza $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (generate dalla relazione $\sim_{ae}$) con le classi di equivalenza generate dalla classe di equivalenza secondo $\sim_{qe}$ di una qualsiasi funzione φ_u con la proprietà (1). In altre parole, d'ora in poi, tutti gli elementi u di $H^1(\mathbb{R}^d)$ saranno classi di equivalenza secondo $\sim_{qe}$ ed ogni rappresentante φ_u di u avrà la proprietà (1). Come al solito useremo la stessa lettera per indicare la classe di equivalenza ed i rappresentanti che la generano.

2. Convergenza cap-quasi-ovunque

Definizione 1. *Diciamo che una proprietà $\mathcal{P}$ vale* cap-*quasi-ovunque in $\mathbb{R}^d$ se esiste un insieme $\mathcal{N}$ di capacità nulla in $\mathbb{R}^d$ tale che $\mathcal{P}(x)$ vale per ogni punto $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}$.*

Teorema 2. *Sia u_n una successione in $H^1(\mathbb{R}^d)$ che converge forte-H^1 ad una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge a u* cap-*quasi-ovunque.*

Proof. A meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq 4^{-n} \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1.$$

Sia $\mathcal{N}$ un insieme di capacità nulla tale che

$$u_n(x_0) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx \quad \text{per ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N} \quad \text{ed ogni} \quad n \geq 1.$$

Mostreremo che esiste un insieme Ω di capacità nulla tale che:

(a) per ogni $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{N} \cup \Omega)$ la successione $u_n(x)$ è di Cauchy;
(b) il limite u_∞ ha la proprietà seguente:

$$u_\infty(x_0) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u_\infty(x)\,dx \quad \text{per ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{N} \cup \Omega).$$

Step 1. *Costruzione di* Ω. Per ogni n definiamo gli insiemi

$$\omega_n := \Big\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u_{n+1} - u_n| > \frac{1}{2^n} \quad \text{per un qualche} \quad r \in (0,1) \Big\},$$

$$\Omega_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \omega_k \qquad \text{e} \qquad \Omega := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_n.$$

Fissiamo ora $R > 2$ e consideriamo una funzione cut-off φ_R tale che

$$\varphi_R = 1 \quad \text{in} \quad B_{R+1}, \qquad \varphi_R = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_{2R}.$$

Allora, abbiamo

$$\text{cap}\big(\omega_n; B_{2R}\big) \leq (2^n)^2\, C_d \int_{B_{2R}} \big|\nabla\big(\varphi_R(u_n - u_{n+1})\big)\big|^2\,dx \leq \frac{C_d}{4^n}.$$

Di conseguenza,

$$\text{cap}\big(\Omega_n; B_{2R}\big) \lesssim \frac{1}{4^n},$$

ed infine

$$\text{cap}\big(\Omega; B_{2R}\big) = 0.$$

Step 2. *Dimostrazione di* (a). Se $x \notin \Omega$, allora $x \notin \Omega_n$ per un qualche n e quindi

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u_{k+1} - u_k| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{per ogni} \quad k \geq n \quad \text{e per ogni} \quad r \in (0,1).$$

Di conseguenza, passando al limite per $r \to 0$, otteniamo

$$|u_k(x) - u_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{per ogni} \quad k \geq n.$$

Step 2. *Dimostrazione di* (b). Sia $x \notin \Omega \cup \mathcal{N}$ (quindi $x \notin \Omega_n \cup \mathcal{N}$ per un qualche $n \geq 1$). Usando il punto precedente ed il fatto che $\big(\Omega_k\big)_{k\geq 1}$ è una famiglia derescente, abbiamo che per ogni $m \geq n$

$$\begin{aligned}\left|u_\infty(x) - \fint_{B_r(x)} u_\infty\right| &\leq |u_\infty(x) - u_m(x)| + \\ &\quad + \left|u_m - \fint_{B_r(x)} u_m\right| \\ &\quad + \left|\fint_{B_r(x)} u_m - \fint_{B_r(x)} u_\infty\right| \\ &\leq \frac{4}{2^m} + \left|u_m - \fint_{B_r(x)} u_m\right|.\end{aligned}$$

Ora, usando il fatto che $x \notin \mathcal{N}$ e passando al limite per $r \to 0$, otteniamo

$$\lim_{r\to 0}\left|u_\infty(x) - \fint_{B_r(x)} u_\infty\right| \leq \frac{4}{2^m}.$$

Infine, siccome m è arbitrario, abbiamo la tesi. □

---

3. Tracce

Se $Tu \in L^2(\partial B_r)$ è la traccia di una funzione di Sobolev $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e se $\varphi_u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione con la proprietà (1), allora φ_u è definita per $\mathcal{H}^{d-1}$-quasi-ogni punto su ∂B_r e

$$Tu = \varphi_u \quad \text{in} \quad L^2(\partial B_r).$$

In altre parole, la traccia di u è la restrizione del rappresentante φ_u.

---

4. Quasi-continuità

Teorema 3. *Consideriamo una funzione di $H^1(\mathbb{R}^d)$ e una sua rappresentante $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che*

$$u(x_0) = \lim_{r\to 0}\fint_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \quad \textit{per cap-quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme Ω_ε tale che

$$u : \mathbb{R}^d \setminus \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R} \quad \textit{è una funzione continua} \qquad \textit{e} \qquad \mathrm{cap}\,\big(\Omega_\varepsilon; B_{2R}(x_0)\big) < \varepsilon,$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $R \geq 1$.

Proof. Sia $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una successione di funzioni tale che

$$\|\varphi_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{4^n} \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consideriamo gli insiemi

$$A_k = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| > \frac{1}{2^k}\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Omega_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k,$$

Chiaramente, su $\mathbb{R}^d \setminus \Omega_\varepsilon$ la successione φ_n converge uniformemente ad una funzione φ_∞ continua su $\mathbb{R}^d \setminus \Omega_\varepsilon$. Inoltre, siccome φ_n converge a u cap-quasi-ovunque su $\mathbb{R}^d$, abbiamo che esiste un insieme di capacità nulla $\mathcal{N}$ tale che

$$u = \varphi_\infty \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d \setminus (\Omega_\varepsilon \cup \mathcal{N})$$

Quindi, basta dimostrare che

$$\mathrm{cap}\,\big(\Omega_\varepsilon \cup \mathcal{N}; B_{2R}(x_0)\big) > \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{ed ogni} \quad R > 1.$$

Fissiamo $R > 1$ ed una funzione $\varphi_R \in H^1_0(B_{2R})$ tale che

$$\varphi_R = 1 \quad \text{su} \quad B_R \ ; \qquad 0 \leq \varphi_R \leq 1 \quad \text{e} \quad |\nabla\varphi_R| \leq 1 \quad \text{su} \quad B_{2R}\ .$$

Allora,

$$A_k \cap B_R = \left\{2^k \varphi_R |\varphi_{k+1} - \varphi_k| > 1\right\} \cap B_R,$$

e quindi

$$\mathrm{cap}(A_k; B_{2R}) \le 4^k 16 \frac{\varepsilon}{4^{2k}}.$$

Sommando su $k \ge 1$, otteniamo

$$\mathrm{cap}(\Omega_\varepsilon; B_{2R}) \le \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{cap}(A_k; B_{2R}) \le 6\varepsilon,$$

che conclude la dimostrazione. □

---

5. Gli spazi H^1_0

Teorema 4. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Allora, sono equivalenti:*

(i) $u \in H^1_0(\Omega)$;
(ii) $u = 0$ cap-*quasi-ovunque in* $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Proof. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue direttamente dalla definizione di $H^1_0(\Omega)$ ed il Teorema 2. Dimostreremo che (ii) $\Rightarrow$ (i). Possiamo supporre che

$$\overline{\Omega} \subset B_R\ , \qquad u \ge 0 \qquad \text{e} \qquad u \in H^1_0(B_{2R}).$$

Sia $\mathcal{N}$ un insieme di capacità nulla tale che

$$u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus (\Omega \cup \mathcal{N}).$$

Sia inoltre K_ε un insieme tale che

$$u : \mathbb{R}^d \setminus K_\varepsilon \to \mathbb{R}$$

è una funzione continua e

$$\mathrm{cap}(K_\varepsilon; B_{2R}) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora esiste un insieme aperto Ω_ε tale che:

$$K_\varepsilon \cup \mathcal{N} \subset \Omega_\varepsilon \qquad \text{e} \qquad \mathrm{cap}(\Omega_\varepsilon; B_{2R}) < \varepsilon.$$

Consideriamo ora la funzione

$$w_\varepsilon \in H^1_0(B_{2R})$$

che realizza il minimo

$$\min\left\{\int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_{2R})\,,\ u = 1 \ \text{ on } \ \Omega_\varepsilon\,,\ 0 \le u \le 1 \ \text{ in } \ B_{2R}\right\}.$$

Allora,

$$\int_{B_{2R}} |\nabla w_\varepsilon|^2\,dx \le \varepsilon\ , \qquad u(1 - w_\varepsilon) = 0 \quad \text{on} \quad \Omega_\varepsilon \cup (\mathbb{R}^d \setminus \Omega).$$

$$u(1 - w_\varepsilon) \to u \quad \text{fortemente in} \quad H^1_0(B_{2R}).$$

Quindi è sufficiente mostrare che

$$u(1 - w_\varepsilon) \in H^1_0(\Omega) \quad \text{per ogni} \quad \varepsilon > 0.$$

Per ogni $t > 0$ consideriamo la funzione

$$u_t := (1 - w_\varepsilon)(u - t)_+$$

Osserviamo che l'insieme $\{u_t \ne 0\}$ è contenuto in Ω e che inoltre

$$\{u_t \ne 0\} \Subset \Omega.$$

Di conseguenza,

$$u_t \in H^1_0(\Omega).$$

Siccome, $u_t \to (1 - w_\varepsilon)u$, otteniamo che $(1 - w_\varepsilon)u \in H^1_0(\Omega)$ e quindi la tesi. □